Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.А.Иванова, Ю.С.Налбандян

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по курсу
«Высшая математика»
(направление обучения «Социология»)
Часть 1. Элементы линейной алгебры

Ростов-на-Дону
2017

Методические указания разработаны кандидатом физико-математических наук, старшим преподавателем кафедры математического анализа О.А.Ивановой и кандидатом физико-математических наук, доцентом кафедры математического анализа Ю.С.Налбандян.

Ответственный редактор канд. физ.-матем. наук М.А.Шубарин

Компьютерный набор и верстка канд. физ.-матем. наук Ю.С.Налбандян

Печатается в соответствии с решением кафедры математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук, протокол № 6 от 6 июня 2017 года.

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Высшая математика», предназначенный для студентов направления «социология», решает такие важные задачи, как ознакомление студентов с основными понятиями математических дисциплин, которые необходимы для решения теоретических и практических задач социологии; развитие навыков работы с литературой, абстрактного мышления и умения строго излагать свои мысли. Кроме того, он способствует подготовке обучающихся к практическому применению полученных знаний. В связи с вышесказанным основное внимание уделяется практическим занятиям и самостоятельной работе студентов, организации которых и должно способствовать данное методическое пособие.

В первую часть включены разделы, которые изучаются в первой половине первого семестра. Для освоения этого материала достаточно школьных знаний элементарной математики. Каждый из параграфов содержит необходимые теоретические положения, разобранные «типовые» задачи, которые сопровождаются указаниями по организации самостоятельной проверки полученного результата, а также упражнения для самостоятельного решения, позволяющие закрепить полученные навыки.

План проведения практических занятий сообщается студентам в начале семестра, поэтому перед каждым занятием рекомендуется разобрать указанные преподавателем разделы лекций и соответствующие разделы учебников и учебных пособий, а также выписать определения, формулы, утверждения, которые потребуются для решения задач по заданной тематике. После занятия перед выполнением домашнего задания желательно просмотреть задачи, разобранные в аудитории, попробовать самостоятельно восстановить их решения, и только после этого, убедившись в том, что материал освоен, перейти к решению новых задач. При необходимости - обращаться к рекомендованной литературе, обращая особое внимание на разобранные примеры.

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

1.1. Основные понятия теории множеств. Операции с множествами. Под **множеством** будем понимать некоторую совокупность объектов. Обычно множества обозначают заглавными латинскими буквами (A, B, C и т.д.), элементы множеств – соответствующими строчными (т.е. запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A). Элементы множества могут быть перечислены через запятую, например, $A=\{-3;2;4;7\}$. Кроме того, множество может быть записано с помощью характеристического свойства, например, множество корней квадратного уравнения $x^2-5x+4=0$ имеет вид $A=\{x: x^2-5x+4=0\}$.

В зависимости от числа элементов множества делятся на конечные и бесконечные. Конечным, например, является множество столов в учебной аудитории, бесконечным – множество песчинок в горсти песка. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

Два множества A и B называются равными ($A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов. Например, если $A=\{x: x^2-5x+4=0\}$ и $B=\{1;4\}$, то $A=B$.

Говорят, что множество A является подмножеством B ($A \subset B$), если каждый элемент множества A является также и элементом множества B. Например, $A=\{-3;2;4;7\} \subset B=\{-5;-3;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

К основным операциям над множествами относятся объединение, пересечение и разность.

Объединением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \bigcup B$, которое состоит из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Другими словами, $A \bigcup B = \{x : x \in A \; или \; x \in B\}$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \bigcap B$, которое состоит из всех элементов, входящих одновременно и в множество A, и в множество B (т.е. пересечение состоит из общих элементов множеств A и B). Т.е, $A \bigcap B = \{x : x \in A \; и \; x \in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$, которое состоит из тех элементов, которые входят в A, и не входят в B (т.е. из A надо убрать все его общие с B элементы). Фактически, $A \setminus B = \{x : x \in A \; и \; x \notin B\}$. Аналогично определяется разность множеств B и A: $B \setminus A = \{x : x \in B \; и \; x \notin A\}$.

Наконец, под **симметрической разностью** множеств A и B понимают множество, определяемое следующим образом: $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$. Таким образом, симметрическая разность двух множеств состоит из элементов, принадлежащих одному множеству, но не принадлежащих другому, а потому справедливо равенство $A \Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$.

Пример 1.1. Найти объединение, пересечение, обе разности и симметрическую разность множеств A и B, если:

1) $A=\{-3;-1;0;1;2;3;4;5\}$, $B=\{-2;0;2;3;6;7\}$; 2) A=[-1;3], B=(2;4].

Решение. Рассмотрим первую ситуацию. В объединение входят элементы, содержащиеся хотя бы в одном из множеств, т.е. фактически все элементы обоих множеств, записанные без повторов в порядке их возрастания. Следовательно, $A \bigcup B = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Пересечение – это совокупность общих элементов, т.е. $A \bigcap B = \{0;2;3\}$. Далее, $A \setminus B = \{-3;-1;1;4;5\}$, $B \setminus A = \{-2;6;7\}$ и, наконец, $A \Delta B = \{-3;-2;-1;1;4;5;6;7\}$.

Во втором случае $A \bigcup B = [-1;4]$, $A \bigcap B = (2;3]$, $A \setminus B = [-1;2]$ (так как 2 принадлежит A и не принадлежит B), $B \setminus A = (3;4]$ и $A \Delta B = [-1;2] \bigcup (3;4]$.

В дальнейшем нам предстоит часто иметь дело со следующими **основными числовыми множествами**:

- множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}=\{1;2;3;\ldots;n;n+1;\ldots\}$ (числа для счёта);
- множество целых чисел $\boldsymbol{Z}=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots\}$;
- множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}=\{q\text{: } q=m/n, \text{ где } m\in\boldsymbol{Z}, n\in\boldsymbol{N}\}$;

- множество иррациональных чисел $\boldsymbol{I}$ (чисел, представимых в виде бесконечной десятичной непериодической дроби) – к таким относятся, например, $\sqrt{3}$ (алгебраическое иррациональное число) или π (трансцендентное иррациональное число);
- множество вещественных (действительных) чисел $\boldsymbol{R}$, представляющее собой объединение рациональных и иррациональных чисел.

Очевидны соотношения $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{Q} = \varnothing$; $\boldsymbol{I} \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}$.

1.2. Модуль действительного числа. Пусть $x \in \boldsymbol{R}$, т.е. x – произвольное действительное число. Одним из важнейших понятий является *модуль действительного числа*, т.е. число, определяемое по правилу: $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$.

Полезным оказывается и знание основных свойств модуля:

1) $|x| \geq 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, причем $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $|xy| = |x| \cdot |y|$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in \boldsymbol{R}$;

3) $|x^n| = |x|^n$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$;

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in \boldsymbol{R}$, $y \neq 0$;

5) $|x + y| \leq |x| + |y|$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in \boldsymbol{R}$ (неравенство треугольника);

6) с каждым действительным числом можно сопоставить точку на числовой прямой, а модуль вещественного числа – это расстояние от начала координат до соответствующей точки (геометрический смысл модуля).

Пример 1.2. Записать числовые множества, соответствующие заданным равенствам и неравенствам: а) $|x| = 3$; б) $|x| \geq 3$; в) $|x - 4| = 2$; г) $|x - 4| < 2$.

Решение. Равенство а) означает, что нас интересуют точки, удалённые от начала координат на расстояние, равное 3. Это $x=-3$ и $x=3$. Неравенство б) можно перефразировать так: найти точки, удалённые от начала координат на расстояние, большее или равное 3. Следовательно, $x\in(-\infty;-3]\bigcup[3;+\infty)$. В случае в) речь идет о точках, удаленных на расстояние 2 от точки $a=4$, поэтому $x=2$ и $x=6$. Наконец, в неравенстве г) мы имеем дело с точками, расстояние от которых до $a=4$ меньше 2, т.е. $x\in(2;6)$.

Пусть ε — произвольное положительное вещественное число (ε>0). **ε-окрестностью** действительного числа *a* (или окрестностью числа *a* радиуса ε) называется множество следующего вида: $U_a(\varepsilon)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$. Равносильны два утверждения: $x\in U_a(\varepsilon)$ и $|x-a|<\varepsilon$.

Например, окрестность числа 2 радиуса 0,5 имеет вид $U_2(0{,}5)=(1{,}5;2{,}5)$ (при этом $x\in U_2(0{,}5)\Leftrightarrow x\in(1{,}5;2{,}5)\Leftrightarrow|x-2|<0{,}5)$, а окрестность числа -5 радиуса 1 – соотношением $U_{-5}(1)=(-6;-4)$ $(x\in U_{-5}(1)\Leftrightarrow x\in(-6;-4)\Leftrightarrow|x+5|<1)$.

Можно рассмотреть и окрестности бесконечно удалённых точек, при этом задается произвольное положительное число *E*.

***E*-окрестностью положительной бесконечно удаленной точки** (+∞) называется множество $U_{+\infty}(E)=(E;+\infty)$, ***E*-окрестностью отрицательной бесконечно удаленной точки** (-∞) называется множество $U_{-\infty}(E)=(-\infty;-E)$, ***E*-окрестностью бесконечно удаленной точки** (∞)называется множество $U_\infty(E)=(-\infty;-E)\bigcup(E;+\infty)$. При этом справедливы соотношения:

$x\in U_{+\infty}(E)\Leftrightarrow x\in(E;+\infty)\Leftrightarrow x>E$;

$x\in U_{-\infty}(E)\Leftrightarrow x\in(-\infty;-E)\Leftrightarrow x<-E$;

$x\in U_\infty(E)\Leftrightarrow x\in(-\infty;-E)\bigcup(E;+\infty)\Leftrightarrow|x|>E$.

Например, при E=100 имеем: $U_{+\infty}(100)=(100;+\infty)$, $U_{-\infty}(100)=(-\infty;-100)$, $U_\infty(100)=(-\infty;-100)\bigcup(100;+\infty)$.

1.3. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 1.1. Для предложенных множеств найти объединение, пересечение, разности, симметрическую разность.

1) *A={0; 1; 2; 3; 4; 5}*, *B={-4; -2; 0; 2; 4; 6}*;

2) *A= {-6;-; 0; 3;6}* , *B={0; 2; 4; 6; 8}*;

3) *A= {-6;-; 0; 3;6}* , *B={0; 2; 4; 6; 8}*;

4) *A=[-3;2)*, *B=[1;4]*;

5) *A=[-2;0]*, *B=[0;5]*;

6) *A=[-3;2)*, *B=[2;4]*;

7) *A=[-4;6)*, *B=(1;9]*;

Упражнение 1.2. Найти $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, если $A = \{x \in \boldsymbol{Z}\textbf{:}\ x$ делится на $7\}$, $B = \{ x \in \boldsymbol{Z}\textbf{:}\ x$ не делится на $14\}$.

Упражнение 1.3. Записать в виде числового интервала и построить множества, соответствующие неравенствам:

1) $|x+4| \le 2$**;** **2)** $|x| < 3$**;** **3)** $|x-1| > 5$**;** **4)** $|x| > 7$**;** **5)** $|x-2| \ge 5$**;** **6)** $|x-5| < 5$**;** **7)** $|x| \ge 1$**;** **8)** $|x+1| < 1/2$**;** **9)** $2 < |x| \le 5$**.**

Упражнение 1.4. Записать все соотношения, соответствующие указанным окрестностям:

1) $U_3(1)$**;** **2)**$U_{-3}(2)$**;** **3)**$U_0(1/3)$**;** **4)**$U_\infty(10)$**;** **5)**$U_{-\infty}(100)$**;** **6)**$U_{+\infty}(20)$**.**

§ 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1.Основные понятия. Комплексное число – это выражение вида

$$z = a + bi, \qquad \textbf{(2.1)}$$

где a, b – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – ***мнимая единица.*** Первое из вещественных чисел, a, называется **вещественной (действительной) частью** комплексного числа (используется обозначение $a = \operatorname{Re} z$); второе, b, — **мнимой частью** ($b = \operatorname{Im} z$). Выражение (2.1) называют **алгебраической формой записи комплексного числа**. Заметим, что множество всех комплексных чисел обозначается $\boldsymbol{C}$**,** причем $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$ (множество вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел).

Пример 2.1. Решить уравнение $x^2 - 3x + 10 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 10 = -31$ меньше нуля, но теперь мы учитываем понятие мнимой единицы:

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-31}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{31} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{31}\, i}{2}$, т.е. $x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{31}}{2} i$; $x_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{31}}{2} i$.

Корни рассмотренного уравнения отличаются друг от друга только <u>знаком перед мнимой частью</u>. Для таких чисел существует специальное определение. Числом, **сопряженным** к $z = a + bi$, называют число вида $\bar{z} = a - bi$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = a^2 + b^2$ *(проверьте!).* Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дикриминантом являются два сопряженных комплексных числа *(докажите!).*

Справедливы следующие **правила арифметических действий над комплексными числами** $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $x_2^2 + y_2^2 > 0$, т.е. знаменатель не обращается в 0, $z_2 \neq 0 + i0$).

Пример 2.2. Вычислить $z = \dfrac{2+3i}{1-i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами 3), 2), 1), получаем:

$$z = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+3i+2i+3i^2}{1-i^2} = \frac{(2-3)+5i}{1+1} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -1/2$, $\operatorname{Im} z = 5/2$.

2.2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (2.1) можно поставить в соответствие точку *M(a;b)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа $z = a + 0i = a$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z = 0 + bi = bi$). *Модулем комплексного числа* назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*, что соответствует геометрическому смыслу модуля, рассмотренному в п.1.2), т.е. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Аргументом комплексного числа* ($\varphi = \operatorname{Arg} z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси *OX*. **Главное значение аргумента**, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом выражение вида

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \textbf{(2.2)}$$

называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

Преобразуем (2.1)

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = |z|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

и, сравнивая с (2.2), получаем, что аргумент z можно найти, решив систему

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Замечание. При определении аргумента необходимо учитывать допустимый для главного аргумента интервал и расположение точки, соответствующей комплексному числу, на плоскости.

Пример 2.3. Определить модуль и аргумент числа $z = 1 - i\sqrt{3}$, записать это число в тригонометрической форме.

Решение. По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения аргумента воспользуемся формулой (2.3): $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Учитывая, что точка $M(1;-\sqrt{3})$, соответствующая заданному комплексному числу, лежит в четвертой четверти, получаем, что $\varphi = \operatorname{Arg} z = \dfrac{5\pi}{3}$. Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

2.3. Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой (2.2), то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad \textbf{(2.4)}$$

Для извлечения корня n-й степени (n – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме (2.2), применяется формула, дающая ровно n значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0,1,\ldots,n-1. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Замечание. Все n корней n-й степени из комплексного числа z равномерно распределены по окружности радиуса $|z|$ (с центром в начале координат).

Пример 2.4. Вычислить: а) $(-1+i)^{13}$; b) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании а), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка (-1;1) лежит во второй четверти). Следовательно, в силу (2.4) $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right)$ и $(-1+i)^{13} = \sqrt{2^{13}}\left(\cos\frac{13\cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{13\cdot 3\pi}{4} \right)$.

Учитывая, что $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$, используя свойства тригонометрических функций и принимая во внимание правила действий со степенями, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 2^6 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}) \right) = 64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 64 - 64i.$$

В задании b) тригонометрическая форма исходного числа имеет вид $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ ($|z|=1$, точка (-1;0) лежит на оси OX), поэтому в силу (2.5)

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}, \; k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

при $k=0$ $z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

при $k=1$ $z_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$;

при $k=2$ $z_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.4. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 2.1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1) $(2+3i)-(1-i)(2i-3)$; 2) $\frac{3-7i}{2+4i}$; 3) $3i-\frac{1-5i}{2+3i}$;

4) $(4+3i)\frac{(i-2)+(4-3i)}{i-1}$; 5) $\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}-i}$; 6) $(1+3i)^3+2$;

7) $(1-i)^2-i^5$; 8) i^n; 9) $i\cdot\overline{(i+2)}-\frac{1+i}{1-i}$; 10) $\overline{3i-4}-i\frac{2-5i}{2i+5}$.

Упражнение 2.2. Заданы ли следующие комплексные числа в тригонометрической форме (ответ обосновать)?

1) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $z=2\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$; 4) $z=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$;

5) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 6) $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

Упражнение 2.3. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1) $-2i$; 2) $1+i$; 3) $-3-3i$; 4) $-\sqrt{3}+i$; 5) $3+5i$.

Упражнение 2.4. Найти все корни уравнений:

1) $x^2+4=0$; 2) $x^2-6x+18=0$; 3) $x^4+5x^2+4=0$;

4) $x^2-2x+10=0$; 5) $x^2+2x+10=0$; 6) $x^4-81=0$.

Упражнение 2.5. Построить множество точек**,** удовлетворяющих условию:

1) $|z|=2$; 2) $|z|<3$; 3) $|z|\geq 5$; 4) $|z-3|=2$;

5) $|z-(2+3i)|>2$; 6) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$; 7) $\arg z=-\dfrac{\pi}{6}$.

Упражнение 2.6. Вычислить (найти все значения корней!):

1) $(1+i\sqrt{3})^5$; 2) $\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)\right]^{10}$; 3) $(2i-2)^{15}$; 4) $\sqrt[3]{i}$;

5) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^9}{(\sqrt{3}-i)^6}$; 6) $\sqrt[4]{-4}$; 7*) $\sqrt{1+i}$; 8) $\sqrt[6]{1}$.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

3.1. Предварительные сведения. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, причем в скобках указывается размер – количество строк и столбцов. Так, запись $B(2x3)$ означает, что речь идет о матрице, состоящей из двух строк и трех столбцов, например $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$). Через A_i обозначают i-*ю* строку матрицы A, через A^j – j-*й* столбец.

Матрицы A, B называются **равными** ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях (местах), совпадают.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется **квадратной**. Элементы квадратной матрицы $A(nxn)$ a_{11} , $a_{22}, \dots,$ a_{nn} образуют **главную диагональ**. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется **диагональной**. Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется е**диничной**. Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется **верхней (нижней) треугольной матрицей**. Например, среди квадратных матриц размера $3x3$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

3.2. Арифметические действия с матрицами. Чтобы умножить матрицу *A(mxn)* на отличное от нуля вещественное число *k*, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти **сумму матриц** *A(mxn), B(mxn)* (одного и того же размера!), необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

При этом речь идет об алгебраической сумме, т.е. при вычислении *A-B* находим разность элементов, стоящих на одинаковых местах.

Пример 3.1. Найти *2A-B*, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число "2", затем находим разность:

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-1 & -2-0 \\ 4-(-3) & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Произведение *AB* можно определить только для матриц размера *A(mxn), B(nxp)*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *C(mxp)* и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы

B, т.е. $c_{ij} = A_i B^j$ $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,p)$. Фактически каждую строку матрицы A необходимо скалярно умножить на каждый столбец матрицы B. Под скалярным произведением двух векторов $X = (x_1; x_2; x_3;...; x_к)$, $У = (y_1; y_2; y_3;...; y_к)$, как обычно, понимается число, определяемое по следующему правилу:

$$XУ = (x_1; x_2; x_3;...; x_к)(y_1; y_2; y_3;...; y_к) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_к y_к$$

Пример 3.2. Найти AB и BA для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размеры матриц *2x2*, поэтому оба произведения определены:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2;5)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (2;5)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (-1;1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (-1;1)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 3 & 2\cdot(-2) + 5\cdot 4 \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 3 & -1\cdot(-2) + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1;-2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (1;-2)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (3;4)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (3;4)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot 5 + (-2)\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 5 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 19 \end{pmatrix}.$$

Как видно, $AB \neq BA$, т.е. эта операция не коммутативна.

Матрицей, **транспонированной** к матрице *A(mxn)*, называется матрица *A^T(nxm)*, столбцы которой являются соответствующими строками исходной матрицы. Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3.3. Найти $AB+2C^T$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. Учитывая все правила действий с матрицами, получаем:

$$AB+2C^T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}(-1;1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} & (-1;1)\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\\ (0;4)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} & (0;4)\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\\ (2;1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} & (2;1)\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\end{pmatrix}+$$

$$+2\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & 7\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & 2+4\\ 0+12 & 0+16\\ 2+3 & -4+4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 10\\ 8 & 14\\ 12 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 10\\ 8 & 14\\ 12 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 20 & 30\\ 17 & 6\end{pmatrix}.$$

3.3. Элементарные преобразования матриц. К таким преобразованиям матриц относятся следующие действия:

1) перемена местами двух строк матрицы (краткая запись: $C_k \leftrightarrow C_l$);

2) вычеркивание нулевой строки матрицы (строки, в которой все элементы равны нулю);

3) умножение всех элементов одной строки матрицы на одно и то же число, отличное от нуля (коротко: $C_l = kC_l$);

4) прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующих элементов другой ее строки, умноженных на одно и то же отличное от нуля число (коротко: $C_l = C_l + kC_p$).

Говорить о равенстве матриц (и использовать знак «=») при подобных преобразованиях нельзя. Вместо «=» применяется знак «~» и дается следующее определение. Матрицы А, В называются **эквивалентными**, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Матрица *A(mxn)* называется **ступенчатой**, если в каждой ее строке есть элемент, в столбце которого все элементы ниже являются нулями, а в последней строке есть хотя бы один ненулевой элемент. Упомянутые в определении ненулевые элементы называют **ведущими**. Ступенчатыми являются, например, треугольные матрицы, матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 5\\ 0 & 4 & 6 & 8\\ 0 & 6 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и т.д.

Любую ненулевую матрицу можно путем элементарных преобразований свести к эквивалентной ей ступенчатой. Алгоритм доказательства этого утверждения совпадает с алгоритмом практического преобразования матрицы.

Пример 3.4. Привести к ступенчатому виду матрицы $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -7 & 3 & 3\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}$.

Решение. При преобразованиях матрицы *A* на первом шаге ведущим элементом в первой строке будет a_{13}, на втором – во второй строке – a_{21} . Имеем:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -7 & 3 & 3\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3+2C_1]{C_2=C_2-3C_1}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3=C_3+C_2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=A_{cmyn}.$$

Итак, $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -7 & 3 & 3\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim A_{cmyn}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Ведущим элементом в третьей строке является a_{32} .

Покажем теперь, что $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 6 & 0 & 1\end{pmatrix}=B_{cmyn}$.

$$B=\begin{pmatrix}2&0&4&9\\1&3&2&5\\1&9&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\\1&9&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{C_2=C_2-2C_1}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&-6&0&-1\\0&6&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3+C_2}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&-6&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&-6&0&-1\end{pmatrix}=B_{cmyn}.$$

В первой строке ведущим является элемент b_{11}, во второй в качестве ведущего может выступить либо b_{22}, либо b_{24}.

Рангом матрицы *A(mxn)* в дальнейшем <u>будем считать</u> число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы. Стандартное обозначение ранга матрицы *A(mxn): r(A).* Так, в примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.*

Замечание. Ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Поэтому полученный результат всегда можно проверить, попытавшись привести матрицу к ступенчатой другим способом. Например, после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}:

$$\begin{pmatrix}2&0&4&9\\1&3&2&5\\1&9&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\\1&9&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3=C_3-3C_1}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\\-2&0&-4&-9\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3+C_2}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\end{pmatrix}=B^*_{cmyn}.$$

Получили другую матрицу, эквивалентную *B*. Но она тоже является ступенчатой, причем состоит из двух строк, поэтому и в данном случае *r(B)=2.*

3.4. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 3.1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) а) $2\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-4\\5&0\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}^T+2\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}^T - 2\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; **7)** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$;

8) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}^T$;

9) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Упражнение 3.2. Найти значение заданного многочлена *P(X)* от заданной матрицы *X (*всюду в задании *E* – единичная матрица нужного размера):

1) $P(X) = 3X^2 - 2X + 5E,\ X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $P(X) = X^3 - 3X + E,\ X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3.3. Решить матричные уравнения (O - нулевая матрица соответствующего размера):

1) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2X - \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = O$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 3X = \begin{pmatrix} -13 & 3 & -20 \\ -3 & -11 & -7 \\ -27 & 33 & -21 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3.4. Проверить равенства *AB=BA, (AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3.5. Свести матрицу A к эквивалентной ей ступенчатой, определить ранг матрицы A:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -7 \\ 2 & 7 & -1 & -4 \\ 3 & 8 & -14 & -31 \end{pmatrix}$; **3)** $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; **5)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **6)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

§ 4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ. ТЕОРЕМА КРАМЕРА

4.1. Вычисление определителей. Для определителя квадратной матрицы *A(nxn)* используются обозначения $\det A$ или $|A|$. Определитель квадратной матрицы *A(2x2)* (определитель второго порядка) находится по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Определитель матрицы *A(3x3)* (определитель третьего порядка) сводится к предыдущему случаю по следующему правилу (**формула раскрытия определителя по первой строке**):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Минором элемента a_{ij} называется определитель, полученный из исходной матрицы путем вычеркивания в ней *i-й* строки *и j-го* столбца. Обозначается этот минор как M_{ij}. **Алгебраическим дополнением** к элементу a_{ij} называется число, вычисляемое по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. С учетом этих обозначений формулу (4.2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Формула (4.3) обобщается на случай определителя любой квадратной матрицы *A(nxn)* (определителя *n-го* порядка):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \qquad \textbf{(4.4)}$$

Более того, определитель *n-го* порядка можно раскрывать по любой строке или любому столбцу исходной матрицы, т.е. справедливы формулы:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \quad \mathbf{(4.5)}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \quad \mathbf{(4.6)}$$

где $i=1,2,\ldots,n$ – номер строки, а $j=1,2,\ldots,n$ – номер столбца, по которым раскрывается определитель.

Пример 4.1. Найти : **а)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя а) воспользуемся формулой (4.2), а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой (4.1):

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1\cdot 0 - 2\cdot 5) + 3(4\cdot 0 - 2\cdot 3) - 1(4\cdot 5 - (-1)\cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

При вычислении определителя б) удобно применить формулу (4.5) для $i=2$, т.е. раскрыть определитель по второй строке, в которой много нулей.

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} + 3A_{24} = 3(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка также будем раскрывать по второй строке (с учётом (4.1)):

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} = 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 0 -$$

$$-(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4(-27-12) + (9-(-18)) = 4 \cdot 39 + 27 = 156 + 27 = 183.$$

Итак, $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 183 = 549.$

Пример 4.2. Найти минор M_{31} и алгебраическое дополнение A_{23} для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Минор M_{31} - это определитель матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания 3-й строки и 1-го столбца. Поэтому

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = -6 - 1 = -7.$$

Далее, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$, M_{23} - это определитель матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания 2-й строки и 3-го столбца. Поэтому

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - (-3) \cdot 3) = -(10 + 9) = -19.$$

Замечание. Иногда удобно использовать свойства определителей:

1) Определитель диагональной, а также верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

2) Если в матрице две строки (два столбца) меняются местами, то ее определитель меняет знак.

3) Если в строке (столбце) матрицы все элементы имеют общий множитель, то его выносят за знак определителя.

4) Если к одной из строк матрицы прибавить другую, умноженную на число (отличное от нуля), то определитель не изменится.

5) Если матрица содержит нулевую строку или равные (пропорциональные) строки, то ее определитель равен нулю.

Свойства 4)-5) также справедливы и для столбцов.

Пример 4.3. Вычислить а) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. В первой строке определителя из задания а) все числа кратны 2, поэтому общий множитель можно вынести за знак определителя. Далее проводим преобразования с целью получить в третьем столбце нулевые элементы. В полученном определителе 2-я и 3-я строки равны, значит, исходный определитель обратится в нуль:
$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2=C_2-2C \\ C_3=C_3-C_1}}{=} 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При вычислении определителя б) приведем матрицу к верхнему треугольному виду, учитывая свойства 4) и 2), и воспользуемся свойством 1):
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2=C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \overset{C_3=C_3-2C_2}{=}$$
$$= -\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot (-5) = -15.$$

4.2. Приложения определителей к решению систем линейных уравнений. Теория определителей позволяет решать "квадратные" системы линейных уравнений (когда число неизвестных совпадает с числом уравнений):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (4.7), называется **матрицей системы**, а вектор $B = (b_1 \quad b_2 \quad ... \quad b_n)^T$ — **столбцом (вектором) свободных членов**. При этом (4.7) принимает вид $AX = B$.

Теорема Крамера. Если определитель матрицы системы (4.7) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам $x_i = \frac{|A|_i}{|A|}$, $i=1,2,...,n$, где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 4.4. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем матрицу системы A и столбец свободных членов B: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем нужные определители:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=2(16-4)-(-1)(12+16)-1(-6-12)=60\neq 0;$$

$$|A|_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=4(16-4)-(-1)(44+22)-1(-22-44)=180;$$

$$|A|_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=2(44+22)-4(12+6)-1(33-33)=60;$$

$$|A|_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=2(44+22)-(-1)(33-33)+4(-6-12)=60.$$

По теореме Крамера $x_1=\dfrac{|A|_1}{|A|}=\dfrac{180}{60}=3$; $x_2=\dfrac{|A|_2}{|A|}=\dfrac{60}{60}=1$; $x_3=\dfrac{|A|_3}{|A|}=\dfrac{60}{60}=1$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2\cdot 3-1-1\equiv 4$, $3\cdot 3+4\cdot 1-2\cdot 1\equiv 11$, $3\cdot 3-2\cdot 1+4\cdot 1\equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, следовательно, решение найдено верно.

4.3. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 4.1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix}12 & 6 & -4\\ 6 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 8\end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & -4 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{vmatrix}$; **7)** $\begin{vmatrix}-1 & 5 & -2\\ 1 & 4 & 3\\ 7 & 2 & -3\end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & -2\\ 9 & 0 & 0 & 3\\ 4 & 0 & -1 & -3\\ 10 & 1 & 3 & 5\end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; **10)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; **11)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; **12)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & 2x \end{vmatrix}$**;** **14)** $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}$**;** **15)** $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}$**;** **16)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{vmatrix}$**.**

Упражнение 4.2. Для заданных матриц найти указанные миноры и алгебраические дополнения к элементам матрицы, вычислить определители матриц:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, M_{33}, A_{23}, A_{11}$; **2)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, M_{11}, A_{32}, A_{22}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M_{11}, A_{34}, A_{22}$; **4)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, M_{23}, A_{44}, A_{12}$.

Упражнение 4.3. Найти неизвестное число x из уравнений:

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; **b)** $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; **c)** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$.

Упражнение 4.4. Решить системы уравнений с помощью теоремы Крамера, сделать проверку.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$.

§ 5. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

5.1. Определения и методы поиска. Для квадратной матрицы *A(nxn)* обратной к ней является матрица A^{-1} того же размера, удовлетворяющая равенствам: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица соответствующего размера.

Пример 5.1. Является ли матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ обратной к $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем произведения этих матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-1) & 2\cdot 5 + 5\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) & -1\cdot 5 + (-3)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 5\cdot(-1) & 3\cdot 5 + 5\cdot(-3) \\ -1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & -1\cdot 5 + (-2)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $AB = BA = E$ и $B = A^{-1}$.

Теорема о существовании и единственности. Матрица *A* имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля (т.е. когда матрица является **невырожденной**), при этом справедлива формула $A^{-1} = \dfrac{A*^T}{|A|}$, где $A* = (A_{ij})$ – матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы *A*. Если матрица *A* имеет обратную A^{-1}, то эта обратная матрица – единственная.

Пример 5.2. Найти A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 3 = 3 \neq 0$. Значит, матрица A невырожденная и имеет обратную. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам исходной матрицы и составим из них матрицу $A^* = (A_{ij})$:

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$; $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$; $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$; $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$; $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

Итак, $A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Транспонируем эту матрицу: $A^{*T} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Остается применить формулу из теоремы о существовании обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{A^{*T}}{|A|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & -2/3 \\ -2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Убедиться в том, что матрица, обратная к исходной, найдена верно, можно с помощью определения, проверив равенство $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Замечание 2. Примененный выше способ поиска обратной матрицы называется <u>«методом алгебраических дополнений»</u>. Существуют и другие методы, например, <u>метод Гаусса</u>, технически заключающийся в следующем:

- выписать матрицу A;
- приписать справа единичную соответствующего размера, получив $(A|E)$;
- «сдвоенную» матрицу $(A|E)$ путем элементарных преобразований привести к выражению $(E|A^{-1})$.

В результате проведенных действий слева должна стоять единичная матрица, а справа появится искомая обратная.

В качестве иллюстрации рассмотрим матрицу из примера 5.2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3+C_1]{C_2=C_2-C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[C_3=C_3/3]{C_1=C_1+C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2+C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & -2/3 \\ -2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Как легко заметить, найденная A^{-1} совпала с полученной при решении примера 5.2, что соответствует утверждению о единственности обратной матрицы. Таким образом, второй способ проверки – найти обратную матрицу двумя способами и убедиться в совпадении результатов.

Замечание. При применении метода Гаусса для поиска обратной матрицы нет необходимости вычислять заранее определитель, т.к. для вырожденной матрицы преобразование $(A|E) \sim (E|A^{-1})$ окажется невозможным.

5.2. Решение матричных уравнений. Поскольку операция деления для матриц не определена, для решения матричных уравнений применяют умножение на обратную матрицу. В частности, в уравнении $AX = B$ можно умножить обе части равенства слева на A^{-1}и получить $X = A^{-1}B$ (в силу определения обратной матрицы и свойств операции умножения). С другой стороны, при решении уравнения $YA = B$ умножаем обе части на матрицу A^{-1} справа и получаем $Y = BA^{-1}$. Этим же методом можно решать и квадратные системы линейных алгебраических уравнений.

Пример 5.4.Решить уравнения: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $Y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. В правой части каждого из уравнений стоит одна и та же матрица $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&3\end{pmatrix}$. Найдем обратную к ней методом Гаусса (на первом шаге выполняем действие $C_2=C_2-4C_1$, на втором $C_1=C_1+C_2$ и $C_2=-C_2$):

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\4&3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&-1&-4&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-3&1\\0&1&4&-1\end{array}\right) \text{ и } A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&1\\4&-1\end{pmatrix}.$$

Тогда $X=\begin{pmatrix}-3&1\\4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+2&3-3\\4-2&-4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&-1\end{pmatrix}$ (правую часть первого из уравнений умножили на найденную обратную матрицу слева),

$Y=\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-4&1+1\\-6-12&2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&2\\-18&5\end{pmatrix}$ (правую часть второго уравнения умножили на найденную обратную справа). Заметим, что результат можно проверить, подставив полученные матрицы в исходные уравнения.

Пример 5.5. Решить систему $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$ с помощью обратной матрицы (методом обратной матрицы).

Решение. При решении примера 4.4 был найден $|A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}=60$.

Обратная матрица имеет вид $A^{-1}=\begin{pmatrix}12/60&6/60&6/60\\-18/60&11/60&1/60\\-18/60&1/60&11/60\end{pmatrix}$ *(проверьте!),* и

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}12/60&6/60&6/60\\-18/60&11/60&1/60\\-18/60&1/60&11/60\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\11\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(48+66+66)/60\\(-72+121+11)/60\\(-72+11+121)/60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}.$$

5.3. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 5.1. Доказать по определению, что $B = A^{-1}$:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$; **2)** $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 5.2. С помощью теоремы о существовании проверить, имеют ли данные матрицы обратные:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 5.3. Найти матрицы, обратные к данным, методом Гаусса и методом алгебраических дополнений, убедиться в совпадении результатов:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

Упражнение 5.4. Найти A^{-1} удобным методом, сделать проверку:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Упражнение 5.5. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

5) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Упражнение 5.6. Методом обратной матрицы решить системы уравнений, убедиться в совпадении результатов с решениями упражнения 4.4:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$.

Упражнение 5.7. Решите квадратные систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы, сделайте проверку:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -1 \end{cases}$.

§ 6. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

6.1. Основные обозначения. В п.4.2 рассматривались «квадратные» системы линейных алгебраических уравнений (далее будет использоваться сокращение **СЛАУ**). Теперь предметом изучения становятся СЛАУ произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad \mathbf{(6.1)}$$

Как и раньше, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ из коэффициентов системы (6.1) называется **матрицей системы**, векторы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ **- вектором неизвестных** и **столбцом (вектором) свободных членов** (соответственно). Матрицу вида $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют **расширенной матрицей** системы (6.1). Любой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ является **решением** системы (6.1), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). В матричной форме записи система (6.1) имеет вид $AX = B$, так как при каждом $i=1,2,\ldots,m$ левая часть *i-го* уравнения представляет собой произведение *i-й* строки матрицы системы на вектор *X*, а справа стоит соответствующее значение b_i.

Пример 6.1. Пусть $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ Записать СЛАУ $AX=B$ в виде (6.1).

Решение. Рассмотрим вектор *X* и сопоставим с первым столбцом неизвестное x_1, со вторым - x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Учитывая сказанное выше, из первой строки матрицы *A* и первого элемента вектора *B* получаем: $3x_1+4x_2-2x_3+0x_4=2$ или $3x_1+4x_2-2x_3=2$. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=2 \\ x_1+7x_2+8x_4=-4 \\ -2x_2+3x_3+5x_4=8 \end{cases}$.

6.2. Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Если СЛАУ (6.1) имеет хотя бы одно решение, она называется **совместной** (соответственно, система **несовместная**, если она вообще не имеет решений). Совместная система (6.1) называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (6.1) будем называть **приведенной**, если в каждой ее строке есть элемент, равный 1, а все остальные элементы этого столбца (и ниже, и выше, в отличие от ступенчатой матрицы) равны нулю. Соответствующая приведенной матрице система линейных алгебраических уравнений называется **канонической**, неизвестные, коэффициенты при которых равны 1 и которые присутствуют только в одном уравнении (в остальных коэффициенты при них равны 0), называются **ведущими,** а оставшиеся неизвестные – **свободными**.

Теорема Кронекера-Капелли. СЛАУ (6.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е $r(A) = r(A|B)$.

Для совместной системы число $r = r(A) = r(A|B)$ назовем **рангом системы**.

Теорема о количестве решений. Пусть СЛАУ (6.1) совместна. Если её ранг равен числу неизвестных ($r = n$), то система является определенной; если же $r < n$, то исходная система неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется **общим решением системы**.

6.3. Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной ей канонической, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести её к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система в силу теоремы Кронекера-Капелли несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A) = r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему о количестве решений.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае необходимости, ведущие элементы через свободные).

Пример 6.2. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$.

Решение. Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 2 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 2C_1]{C_2 = C_2 - 3C_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B) = 3$, а $r(A) = 2$ (матрица А расположена слева от вертикальной черты и у нее третья строка состоит только из нулей, т.е. её можно вычеркнуть, а в расширенной матрице в третьей строке остается число «8»). Таким образом, ранги различны, а система несовместна.

Пример 6.3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 2C_1]{C_2 = C_2 + 4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 = C_3 / 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B)=r(A)=3=r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Теперь проведем преобразования по обратному методу Гаусса (необходимо получать нули НАД ведущими элементами), начиная с третьей строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-11C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_1=C_1-C_2/6 \\ C_2=-C_2/6 \\ C_1=-C_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему: $\begin{cases} x_2=1 \\ x_3=1 \\ x_1=3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(3;1;1)^{\mathrm{T}}$. В последующем допустимо записывать ответ и в виде вектор-строки *X=(3;1;1).*

Заметим, что эта же система была решена в примерах 4.4 и 5.5, ответы совпали. В дальнейшем для проверки результата можно пользоваться подстановкой найденных значений в уравнения системы.

Пример 6.4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 10x_1+12x_2+3x_3+10x_4=16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведём расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3\leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B)=r(A)=3=r$, число неизвестных *n=4* и, в соответствии с теоремой о количестве решений, исходная система является неопределенной.

Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное x_2. Теперь преобразуем матрицу к приведённому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-4C_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1=C_1-3C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выписываем полученную систему, ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases} 4x_2+x_3=-8 \\ x_1=3 \\ x_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-8-4x_2 \\ x_1=3 \\ x_4=1 \end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_o=(3;\ x_2;\ -8-4x_2;\ 1)$, $x_2\in(-\infty;+\infty)$.

Частное решение можно получить, если в X_o положить x_2 равным конкретному числовому значению. Например, при $x_2=0$ $X'_{част}=(3;0;-8;1)$, а при $x_2=-1$ $X''_{част}=(3;-1;-4;1)$.

6.4. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 6.1. Решить методом Гаусса СЛАУ (ответы сверить с решениями упражнения 4.4):

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=2 \\ 5x_1-2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=1 \end{cases}$.

Упражнение 6.2. По заданной расширенной матрице выписать СЛАУ и найти её общее решение:

1) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$; 2) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$;

3) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & -4 \end{array}\right)$; 4) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right)$;

5) $\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$;

6) $\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Упражнение 6.3. Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения);

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=6 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=11 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=1 \\ -3x_1+4x_2+4x_3=-2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=10 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -2x_1-x_2+8x_3=20 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=5 \\ 2x_1+4x_2+2x_3+7x_4=7 \\ 3x_1+6x_2+3x_3+10x_4=12 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+5x_4=5 \\ 2x_1+5x_2+8x_3+9x_4=9 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-3x_3+5x_4=-3 \\ x_1-x_2+x_3=-2 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3+x_4=9 \\ x_1-2x_2-3x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+4x_3-x_4=11 \\ 3x_1-2x_2+x_3-x_4=9 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 7x_1+6x_2+3x_3+7x_4=3 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+2x_4=-1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+5x_4=1 \\ 5x_1+6x_2+5x_3+4x_4=2 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=6 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+3x_4=-19 \\ x_1+x_2+2x_3-3x_4=10 \\ 4x_1+6x_2+x_3-2x_4=-12 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3-4x_4=1 \\ x_1-2x_2+2x_3+3x_4=2 \\ -x_1+x_2-13x_3-18x_4=-1 \\ 3x_1-3x_2-17x_3-23x_4=3 \end{cases}$;

12) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ 2x_1+5x_2+3x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+x_4=2 \end{cases}$;

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: АСТ, 2007.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

3. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4. Мальцев Е.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.

5. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. – Математика в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2001.

6. Толстова Ю.Н. Логика математического анализа социологических данных. – М.: Наука, 1991.

7. Толстова Ю.Н. Может ли социология “разговаривать” на языке математики? // Социол. исслед. 2000. № 5. С. 107-116.

СОДЕРЖАНИЕ